Transformations du plan et de l'espace

I. Notion d'espace affine

Nous allons préciser la notion de plan et d'espace géométrique.

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1°) Définition

Déf : On appelle espace affine de direction E tout ensemble non vide $\mathcal{E}$ muni d'une application :
$\begin{cases}\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to E\\(A,B)\mapsto\overrightarrow{AB}\end{cases}$ vérifiant :

(1) $\forall A,B,C\in\mathcal{E},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles),

(2) $\forall A\in\mathcal{E}$, l'application $M\mapsto\overrightarrow{AM}$ réalise une bijection de $\mathcal{E}$ vers E.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés points et ceux de E sont appelés vecteurs.

La dimension de E est aussi appelée dimension de $\mathcal{E}$ et est notée $\dim\mathcal{E}$.

Dans la suite $\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E.

Prop : Pour tout $A,B\in\mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow A=B$ et $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

2°) Translation

Déf : Soit $A\in\mathcal{E}$ et $\vec{u}\in E$. L'unique point $M\in\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ est appelé translaté de A par $\vec{u}$. On note $M=A+\vec{u}$.

Prop : Pour tout $A\in\mathcal{E}$ et $\vec{u},\vec{v}\in E$, on a $(A+\vec{u})+\vec{v}=A+(\vec{u}+\vec{v})$.

Ce point est encore noté : $A+\vec{u}+\vec{v}$.

Déf : On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ de E l'application $t_{\vec{u}}:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ définie par $t_{\vec{u}}(M)=M+\vec{u}$. On note $\mathcal{T}=\{t_{\vec{u}}/\vec{u}\in E\}$.

Prop : $\forall\vec{u},\vec{v}\in E,t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}}\in\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ avec $t_{\vec{u}}^{-1}=t_{-\vec{u}}$.

3°) Sous-espace affine

Déf : Soit $A\in\mathcal{E}$ et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace affine passant par A et dirigé par F l'ensemble $\mathcal{V}=A+F$ défini par $A+F=\{A+\vec{u}/\vec{u}\in F\}=\left\{M/\overrightarrow{AM}\in F\right\}$.

Prop : Si $\mathcal{V}$ est le sous-espace affine passant par A et dirigé par F alors $F=\left\{\overrightarrow{MN}/M,N\in\mathcal{V}\right\}$ et pour tout $B\in\mathcal{V}$, $\mathcal{V}=B+F$.

Déf : Le sous-espace vectoriel F est appelé direction du sous-espace affine $\mathcal{V}=A+F$.

La dimension de F est appelée dimension du sous-espace affine $\mathcal{V}=A+F$.

Prop : Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux sous-espaces affines de directions F et G.

$\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$ est soit vide, soit égal à un sous-espace affine de direction $F\cap G$.

4°) Barycentre

Prop : Soit $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{E}$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n\neq0$.

Il existe un unique point $G\in\mathcal{E}$ tel que $\lambda_1\overrightarrow{GA_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{o}$.

Déf : Le point G est alors appelé barycentre des points $A_1,\ldots,A_n$ affectés des masses $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. On note $G=\mathrm{bar}((A_1,\lambda_1),\ldots,(A_n,\lambda_n))$.

Prop : Pour tout $M\in\mathcal{E}$, $\lambda_1\overrightarrow{MA_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{MA_n}=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\overrightarrow{MG}$.

Déf : On appelle segment d'extrémités $A,B\in\mathcal{E}$ l'ensemble $[A,B]$ formé des barycentre des points A et B affectés de masses positives.

Déf : Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite convexe ssi $\forall A,B\in\mathcal{C},[A,B]\subset\mathcal{C}$.

5°) Repère cartésien

Déf : On appelle repère cartésien de $\mathcal{E}$ tout couple $\mathcal{R}=(O;\mathcal{B})$ formé d'un point O (appelé origine du repère) et d'une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ de E. Ce repère est encore noté $\mathcal{R}=(O;\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$.

Déf : On appelle coordonnées d'un point $M\in\mathcal{E}$ dans un repère cartésien $\mathcal{R}=(O;\mathcal{B})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$.

6°) Espace affine euclidien (orienté)

Déf : On appelle espace affine euclidien (orienté) tout espace affine dont la direction est un espace vectoriel euclidien (orienté). Le produit scalaire est alors usuellement noté par un $\cdot$.

Déf : On appelle repère orthonormé (direct) d'un espace affine euclidien (orienté) tout repère dont la base est orthonormée (directe).

Prop : Si $\mathcal{R}=(O;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ est un repère orthonormé alors les coordonnées $x_1,\ldots,x_n$ de tout point M sont données par $x_i=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e}_i$

Déf : On appelle distance entre deux points A et B d'un espace affine euclidien le réel $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Prop : $AB=0\Leftrightarrow A=B$, $AB=BA$ et $AB\leq AC+CB$.

Déf : Soit O,A,B trois points d'un espace affine euclidien tels que $A,B\neq O$. On appelle écart angulaire en O entre A et B le réel $\widehat{AOB}=Ecart(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\in[0,\pi]$.

7°) Le plan et l'espace géométrique

Déf : On appelle plan géométrique (resp. espace géométrique) tout espace affine $\mathcal{E}$ dont la direction E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 (resp. 3). Plus usuellement, on parle d'espace affine euclidien orienté.

II. Application affine

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E de dimension finie.
Dans la pratique $\mathcal{E}$ est le plan ou l'espace géométrique.

1°) Définition

Déf : Une application $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ est dite affine ssi $\exists\varphi\in\mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall M,N\in\mathcal{E},\overrightarrow{f(M)f(N)}=\varphi(\overrightarrow{MN})$.

L'application φ est alors unique, on l'appelle partie linéaire de f. Elle est notée $\vec{f}$ ou $L(f)$.

Prop : Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine.

$\forall M,N\in\mathcal{E},\overrightarrow{f(M)f(N)}=\vec{f}(\overrightarrow{MN})$ et $\forall M\in\mathcal{E},\forall\vec{u}\in E,f(M+\vec{u})=f(M)+\vec{f}(\vec{u})$.

Prop : (Caractérisation d'une application affine)
Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, $\varphi\in\mathcal{L}(E)$ et $O\in\mathcal{E}$. On a équivalence entre :
(i) f est une application affine de partie linéaire φ,
(ii) $\forall M\in\mathcal{E},f(M)=f(O)+\varphi(\overrightarrow{OM})$.

Prop : Soit $f,g:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$.

Si f et g sont affines alors $g\circ f$ l'est aussi et $\overrightarrow{g\circ f}=\vec{g}\circ\vec{f}$.

2°) Construction d'une application affine

Théorème :

Soit $O,O'\in\mathcal{E}$ et $\varphi\in\mathcal{L}(E)$.

Il existe une unique application affine $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ telle que : $f(O)=O'$ et $\vec{f}=\varphi$.
Ainsi, l'image d'un point et sa partie linéaire suffisent pour caractériser une application affine.

Cor : Les translations sont les seules applications affines dont la partie linéaire est égale à Id_E.

3°) Décomposition d'une application affine

Déf : Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine et $O\in\mathcal{E}$.
On dit que f fixe le point O ssi $f(O)=O$.

Déf : L'application $M\mapsto\overrightarrow{OM}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ vers E permettant d'identifier points et vecteurs. Lors de cette identification, le point O correspond au vecteur nul : on dit qu'on a vectorialisé $\mathcal{E}$ en E.

Théorème :
Soit $O\in\mathcal{E}$. Toute application affine $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique $f=t\circ g$ avec t une translation de $\mathcal{E}$ et g un endomorphisme affine fixant le point O.

4°) Propriétés affines des applications affines

a) sous-espace affine et application affine

Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine.

Théorème :
Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F
alors $f(\mathcal{V})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\vec{f}(F)$.

Cor : Une application affine conserve alignement et coplanérité.

Cor : Une application affine conserve le parallélisme.

Prop : Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F alors $f^{-1}(\mathcal{V})$ est soit vide, soit égal à un sous-espace affine de direction $\vec{f}^{-1}(F)$.

b) barycentre et application affine

Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine.

Théorème :
Si G est le barycentre des points $A_1,\dots,A_n$ affectés des masses $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (avec $\lambda_1+\cdots+\lambda_n\neq 0$) alors $f(G)$ est le barycentre des points $f(A_1),\dots,f(A_n)$ affectés des masses $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Cor : Si $I=m[A,B]$ alors $f(I)=m[f(A),f(B)]$.

Prop : Pour $A,B\in\mathcal{E}$: $f([A,B])=[f(A),f(B)]$.

Prop : Si $\mathcal{C}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$ alors $f(\mathcal{C})$ est convexe.
Si $\mathcal{C}'$ est une partie convexe de $\mathcal{E}'$ alors $f^{-1}(\mathcal{C}')$ est convexe.

c) expression analytique d'une application affine

On suppose que $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\mathcal{R}=(O;\mathcal{B})$.
Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application.
Soit $M\in\mathcal{E}$ et $M'=f(M)$.
Notons X et X' les colonnes coordonnées de M et M'.

Déf : L'expression de X' en fonction de X est appelée expression analytique de l'application f dans $\mathcal{R}$.

Théorème :
Les applications affines de $\mathcal{E}$ correspondent aux applications $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ dont l'expression analytique dans $\mathcal{R}=(O;\mathcal{B})$ est de la forme $X'=AX+B$ avec $A\in M_n(\mathbb{K})$ et $B\in M_{n,1}(\mathbb{K})$.
De plus, A est alors la matrice de $\vec{f}$ dans $\mathcal{B}$.

5°) Transformation affine

Déf : On appelle transformation affine de $\mathcal{E}$ toute application affine $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ bijective. On note $GA(\mathcal{E})$ l'ensemble des transformations affines.

Théorème :
Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application affine.
On a équivalence entre :
(i) f est une transformation affine,

(ii) $\vec{f}$ est un automorphisme.

De plus, si tel est le cas, f^{-1} est une transformation affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$.

Cor : Une transformation affine transforme un sous-espace affine en un sous-espace affine de même dimension.

Prop : $GA(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(\mathcal{E}), \circ)$.

Déf : $GA(\mathcal{E})$ est appelé groupe affine de $\mathcal{E}$.

Prop : L'application $L : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$ définie par $L(f) = \vec{f}$ est un morphisme de groupes.

III. Applications affines usuelles

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E et dimension finie.

1°) Homothéties affines

Soit $O \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons $H_{O,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine déterminée par $H_{O,\lambda}(O) = O$ et $\overrightarrow{H_{O,\lambda}} = \lambda \mathrm{Id}_E$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, $H_{O,\lambda}(M) = O + \lambda\overrightarrow{OM}$. figure.

Déf : $H_{O,\lambda}$ est appelée homothétie de centre O et de rapport λ.

Prop : Une homothétie transforme un sous-espace affine en un sous-espace affine parallèle.

Prop : Soit $O \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$H_{O,\lambda} \circ H_{O,\mu} = H_{O,\lambda\mu} = H_{O,\mu} \circ H_{O,\lambda}$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $H_{O,\lambda}$ est bijective et $(H_{O,\lambda})^{-1} = H_{O,1/\lambda}$.

Théorème :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine telle que $\vec{f} = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Si $\lambda = 1$ alors f est une translation.

Si $\lambda \neq 1$ alors f est une homothétie de rapport λ.

Cor : Soit H et H' deux homothéties de rapports λ et μ.

Si $\lambda\mu \neq 1$ alors $H \circ H'$ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$.

Si $\lambda\mu = 1$ alors $H \circ H'$ est une translation.

Cor : Soit H une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ et t une translation.
$H \circ t$ et $t \circ H$ sont des homothéties de rapport λ.

2°) Projection affine

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de direction F et G un supplémentaire de F.
Pour O un point de $\mathcal{V}$, on introduit $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine déterminée par : $p(O) = O$ et $\vec{p}$ est la projection vectorielle sur F parallèlement à G.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$: $p(M) = O + \vec{p}(\overrightarrow{OM})$. figure

Déf : p est appelée projection sur $\mathcal{V}$ parallèlement à G.

Prop : Les points fixes de p sont ceux de $\mathcal{V}$.

Prop : $p \circ p = p$.

Théorème : (Caractérisation géométrique du point $p(M)$)

$\forall M \in \mathcal{E}, p(M)$ est l'unique point $M' \in \mathcal{E}$ tel que : $M' \in \mathcal{V}$ et $\overrightarrow{MM'} \in G$.

3°) Symétries affines

Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de direction F et G un supplémentaire de F.

Pour O un point de $\mathcal{V}$, on introduit $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine déterminée par $s(O) = O$ et $\vec{s}$ est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$: $s(M) = O + \vec{s}(\overrightarrow{OM})$.

Déf : s est appelée symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ et parallèlement à $\mathcal{W}$.

Prop : Les points fixes de s sont ceux de $\mathcal{V}$.

Prop : $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Théorème : (Caractérisation géométrique du point $s(M)$)

$\forall M \in \mathcal{E}$, $s(M)$ est l'unique point $M' \in \mathcal{E}$ tel que $I = m\left[M, M'\right] \in \mathcal{V}$ et $\overrightarrow{MM'} \in G$.

4°) Projections et symétries orthogonales

Ici $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien.
Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de E de direction F.
On sait que $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F.

Déf : La projection sur $\mathcal{V}$ parallèlement à F est appelée projection orthogonale sur $\mathcal{V}$. La symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{V}$. Lorsque $\mathcal{V}$ est un hyperplan, on parle de réflexion par rapport à $\mathcal{V}$.

IV. Isométries du plan

$\mathcal{P}$ désigne le plan géométrique de direction P.

1°) Définition

Déf : On appelle isométrie du plan toute application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ conservant les distances, i.e. telles que $\forall A, B \in \mathcal{P}$, $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$. On note $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ l'ensemble des isométries du plan.

Prop : $\forall f, g \in \mathcal{I}(\mathcal{P}), f \circ g \in \mathcal{I}(\mathcal{P})$.

2°) Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions

lemme :

Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{P})$ et $A \in \mathcal{P}$ tel que $A' = f(A) \neq A$.

Les points fixes de f appartiennent à $med\left[A, A'\right]$.

lemme :

Une isométrie du plan fixant trois points non alignés est l'identité.

Théorème :

Toute isométrie peut s'écrire comme un produit d'au plus trois réflexions.

Cor : Les isométries du plan sont les applications affines f vérifiant $\vec{f} \in O(P)$.

Cor : $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{P}), \circ)$.

Déf : $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ est appelé groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$.

3°) Déplacement et antidéplacement

Déf : Soit f une isométrie du plan $\mathcal{P}$. On dit que f est un déplacement ssi $\vec{f} \in O^{+}(P)$. Sinon, on dit que f est un antidéplacement. On note $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ l'ensemble des déplacements du plan $\mathcal{P}$

Prop : $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{P}), \circ)$.

Déf : $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ est appelé groupe des déplacements du plan.

4°) Description des déplacements du plan

a) rotation du plan

Soit $O \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On note Rot_{θ} la rotation vectorielle d'angle θ du plan P.
Soit $r : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ le déplacement de $\mathcal{P}$ défini par
$r(O) = O$ et $\vec{r} = \mathrm{Rot}_{\theta}$.

Soit $M \in \mathcal{P}, M' = r(M) = O + \mathrm{Rot}_{\theta}(\overrightarrow{OM})$.

Déf : Le déplacement r est appelé rotation de centre O et d'angle θ. On la note $\mathrm{Rot}_{O,\theta}$.

Prop : Soit $M \neq O$. Le point $\text{Rot}_{O,\theta}(M)$ est l'unique point M' du plan tel que : $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad [2\pi]$.

Prop : Soit $O \in \mathcal{P}$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$\text{Rot}_{O,\theta} = \text{Rot}_{O,\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$,

$\text{Rot}_{O,\theta} \circ \text{Rot}_{O,\theta'} = \text{Rot}_{O,\theta+\theta'} = \text{Rot}_{O,\theta'} \circ \text{Rot}_{O,\theta}$,

$(\text{Rot}_{O,\theta})^{-1} = \text{Rot}_{O,-\theta}$.

b) classification des déplacements du plan

Théorème :

Les déplacements du plan sont les translations et les rotations.

Cor : Un déplacement sans points fixes est une translation de vecteur non nul.
Un déplacement ayant un point fixe est une rotation de centre ce point et d'angle non nul modulo 2π.
Un déplacement ayant au moins deux points fixes est l'identité.

c) composition

Prop : Soit r et r' deux rotations d'angles θ et θ'.

Si $\theta + \theta' = 0 \quad [2\pi]$ alors $r \circ r'$ est une translation.

Si $\theta + \theta' \neq 0 \quad [2\pi]$ alors $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Prop : Soit r une rotation d'angle $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$ et t une translation.

$r \circ t$ et $t \circ r$ sont des rotations d'angle θ.

Prop : Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes du plan et $s = s_{\mathcal{D}}$ et $s' = s_{\mathcal{D}'}$.

Si $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$ alors $s' \circ s$ est la translation de vecteur $2\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à $\mathcal{D}$ tel que $t_{\vec{n}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

Sinon, $s' \circ s$ est la rotation de centre O point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et d'angle 2θ avec $\theta = (\mathcal{D}, \mathcal{D}') \quad [\pi]$.

5°) Description des antidéplacements du plan (hors-programme)

a) symétrie glissée

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$ de direction D et $\vec{v}$ un vecteur de D.
Notons $s = s_{\mathcal{D}}$ et considérons $f = t_{\vec{v}} \circ s$.

Soit $M \in \mathcal{P}$ et $M' = f(M) = s(M) + \vec{v}$.

Déf : L'antidéplacement f est appelé
symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\vec{v}$.

Prop : $f = t_{\vec{v}} \circ s = s \circ t_{\vec{v}}$.

Prop : Les vraies symétries glissées n'ont pas de points fixes.

b) description des antidéplacements du plan

Théorème :

Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les vraies symétries glissées.

Cor : Les antidéplacements ayant au moins un point fixe sont les réflexions.

6°) Classification des isométries du plan

Théorème :

Les isométries du plan $\mathcal{P}$ autres que l'identité sont :
+ les translations (déplacements sans points fixes),
+ les rotations (déplacements avec un seul point fixe),
+ les réflexions (antidéplacements avec une droite de points fixes),
+ les vraies symétries glissées (antidéplacements sans points fixes)

7°) Groupe d'isométries d'une figure

Déf : Soit $X \subset \mathcal{P}$ et $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.
On dit que f laisse invariant X ssi $\forall x \in X, f(x) = x$.
On dit que f laisse globalement invariant X ssi $f(X) = X$.

Prop : Soit $X \subset \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{G}$ formé des isométries de $\mathcal{P}$ tel que $f(X) = X$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}(\mathcal{P}), \circ)$.

Déf : $\mathcal{G}$ est appelé groupe des isométries de la figure X.
$\mathcal{G} \cap \mathcal{D}(\mathcal{P})$ est appelé groupe des déplacements de la figure X.

V. Similitudes du plan

$\mathcal{P}$ désigne le plan géométrique de direction P.

1°) Définition

Déf : On appelle similitude de rapport $\lambda > 0$ du plan $\mathcal{P}$ toute application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ multipliant les distances par λ i.e. telle que : $\forall A, B \in \mathcal{P}, f(A)f(B) = \lambda AB$.
On note $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ l'ensemble des similitudes du plan $\mathcal{P}$.

Prop : Si f et g sont des similitudes de rapports λ et μ alors $g \circ f$ est une similitude de rapport $\lambda\mu$.

Théorème :
Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et $\lambda > 0$.
On a équivalence entre :
(i) f est une similitude de rapport λ,
(ii) On peut écrire $f = h \circ g$ avec h homothétie de rapport λ quelconque et g isométrie.

Cor : Les similitudes sont des transformations affines du plan.
Si f est une similitude de rapport λ, f^{-1} une similitude de rapport $1/\lambda$.

Cor : $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{P}), \circ)$.

Déf : $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ est appelé groupe des similitudes du plan $\mathcal{P}$.

2°) Similitudes directes et indirectes

Déf : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathcal{P})$.
Si $\det(\vec{f}) > 0$ alors on dit que f est une similitude directe.
Si $\det(\vec{f}) < 0$ alors on dit que f est une similitude indirecte.
On note $\mathcal{S}^+(\mathcal{P})$ (resp. $\mathcal{S}^-(\mathcal{P})$) l'ensemble des similitudes directes (resp. indirectes) du plan $\mathcal{P}$.

Prop : Les similitudes directes conservent les angles orientés tandis que les similitudes indirectes les changent en leur opposé.

Prop : $\mathcal{S}^+(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{P}), \circ)$.

Déf : $\mathcal{S}^+(\mathcal{P})$ est appelé groupe des similitudes directes du plan $\mathcal{P}$.

3°) Similitudes à centres

Soit $O \in \mathcal{P}, \theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

Prop : $H_{O,\lambda} \circ \mathrm{Rot}_{O,\theta} = \mathrm{Rot}_{O,\theta} \circ H_{O,\lambda}$.

Déf : La similitude directe $f = H_{O,\lambda} \circ \mathrm{Rot}_{O,\theta}$ est appelée similitude de centre O, d'angle θ et de rapport λ.
On la note $f = \mathrm{Sim}_{O,\theta,\lambda}$.

Prop : Si $M \neq O$ alors $f(M)$ est l'unique point M' du plan caractérisé par :
$OM' = \lambda OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad [2\pi]$.

Prop : Si $\lambda \neq 1$ ou $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$ alors O est le seul point fixe de f.

Prop : Soit $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$ et $\lambda,\lambda' > 0$.

$\text{Sim}_{O,\theta,\lambda} = \text{Sim}_{O,\theta',\lambda'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$ et $\lambda = \lambda'$,

$\text{Sim}_{O,\theta,\lambda} \circ \text{Sim}_{O,\theta',\lambda'} = \text{Sim}_{O,\theta+\theta',\lambda\lambda'} = \text{Sim}_{O,\theta',\lambda'} \circ \text{Sim}_{O,\theta,\lambda}$,

$(\text{Sim}_{O,\theta,\lambda})^{-1} = \text{Sim}_{O,-\theta,1/\lambda}$.

4°) Ecriture complexe d'une similitude

Soit $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$.

a) similitude directe

Par la notion d'affixe, on identifie les points du plan $\mathcal{P}$ et les complexes de $\mathbb{C}$.
Par suite toute application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ peut se voir comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et inversement.

Théorème :

Les similitudes directes du plan $\mathcal{P}$ correspondent aux applications dont l'écriture complexe est de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

b) classification des similitudes directes

Théorème :

Les similitudes directes du plan autres que l'identité sont :
+ les translations (sans point fixe)
+ les similitudes à centres (un point fixe).

Cor : Une similitude directe ayant au moins 2 points fixes est l'identité.

Prop : Soit $O,O' \in \mathcal{P}$, $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$ et $\lambda,\lambda' > 0$.

Soit $f = \text{Sim}_{O,\theta,\lambda}$, $g = \text{Sim}_{O',\theta',\lambda'}$.

Si $\theta + \theta' = 0 \quad [2\pi]$ et $\lambda\lambda' = 1$ alors $f \circ g$ est une translation.

Si $\theta + \theta' \neq 0 \quad [2\pi]$ ou $\lambda\lambda' \neq 1$ alors $f \circ g$ est une similitude à centre d'angle $\theta + \theta'$ et de rapport $\lambda\lambda'$.

Prop : Soit $O \in \mathcal{P}, \theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ tels que $f = \text{Sim}_{O,\theta,\lambda} \neq \text{Id}_{\mathcal{P}}$.

Soit t une translation.
$f \circ t$ et $t \circ f$ sont des similitudes à centre d'angle θ et de rapport λ.

c) similitude indirecte

Prop : Les similitudes indirectes du plan $\mathcal{P}$ correspondent aux applications dont l'écriture complexe est de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

5°) Transformation d'un segment en un autre

Théorème :

Soit $A \neq B$ et $A' \neq B'$ des points du plan $\mathcal{P}$.
Il existe une unique similitude directe qui envoie
A sur A' et B sur B'.
Ainsi, les images de deux points caractérisent entièrement une similitude directe.

Cor : Etant donnés deux segments de même longueur non nulle, il existe une unique déplacement qui transforme l'un en l'autre.

VI. Isométries de l'espace

$\mathcal{E}$ désigne l'espace géométrique de direction E.

1°) Définition

Déf : On appelle isométrie de l'espace toute application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ conservant les distances, i.e. telles que $\forall A,B \in \mathcal{E}$, $f(A)f(B) = AB$. On note $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de l'espace.

Prop : $\forall f,g \in \mathcal{I}(\mathcal{E}), f \circ g \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$.

Théorème :

Toute isométrie peut s'écrire comme un produit d'au plus quatre réflexions.

Cor : Les isométries de l'espace sont les applications affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\vec{f} \in O(E)$.

Cor : $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{E}),\circ)$.

Déf : $(\mathcal{I}(\mathcal{E}),\circ)$ est appelé groupe des isométries du plan $\mathcal{P}$.

2°) Déplacement et antidéplacement

Déf : Soit f une isométrie de l'espace $\mathcal{E}$.

On dit que f est un déplacement ssi $\vec{f} \in O^+(E)$.

Sinon, on dit que f est un antidéplacement.

On note $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ l'ensemble des déplacements du plan $\mathcal{P}$

Prop : $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{E}),\circ)$.

Déf : $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est appelé groupe des déplacements de $\mathcal{E}$.

3°) Rotation de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ un axe dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

On note $\text{Rot}_{\vec{u},\theta}$ la rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ.

Soit $O \in \mathcal{E}$ et $r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'endomorphisme affine déterminé par :

$r(O) = O$ et $\vec{r} = \text{Rot}_{\vec{u},\theta}$. r est un déplacement de l'espace.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On a $M' = r(M) = O + \text{Rot}_{\vec{u},\theta}(\overrightarrow{OM})$.

Déf : Le déplacement r est appelé rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ. On le note $r = \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta}$.

Prop : Si $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$ alors les points invariants de $\text{Rot}_{\mathcal{D},\theta}$ sont ceux de $\mathcal{D}$.

Prop : Soit $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$.

$\text{Rot}_{\mathcal{D},\theta} = \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$,

$\text{Rot}_{\mathcal{D},\theta} \circ \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta'} = \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta+\theta'} = \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta'} \circ \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta}$,

$(\text{Rot}_{\mathcal{D},\theta})^{-1} = \text{Rot}_{\mathcal{D},-\theta}$.

4°) Vissage

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine orientée de direction D, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{v}$ un vecteur de D. Notons $r = \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta}$.

Prop : $f = t_{\vec{v}} \circ \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta} = \text{Rot}_{\mathcal{D},\theta} \circ t_{\vec{v}}$.

Déf : Le déplacement $f = t_{\vec{v}} \circ r$ est appelé vissage d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ et de vecteur $\vec{v}$. On note $f = \text{Viss}_{\mathcal{D},\theta,\vec{v}}$.

Prop : Un vrai vissage n'a pas de points invariants

Prop : Soit $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$ et $\vec{v},\vec{v}' \in D$.

$\text{Viss}_{\mathcal{D},\theta,\vec{v}} = \text{Viss}_{\mathcal{D},\theta',\vec{v}'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \quad [2\pi]$ et $\vec{v} = \vec{v}'$,

$\text{Viss}_{\mathcal{D},\theta,\vec{v}} \circ \text{Viss}_{\mathcal{D},\theta',\vec{v}'} = \text{Viss}_{\mathcal{D},\theta+\theta',\vec{v}+\vec{v}'}$,

$(\text{Viss}_{\mathcal{D},\theta,\vec{v}})^{-1} = \text{Viss}_{\mathcal{D},-\theta,-\vec{v}}$.

5°) Description des déplacements de l'espace

Théorème :

Les déplacements de l'espace autres que $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ sont :

+ les translations (pas de points fixes),
+ les rotations (une droite de points fixes),
+ les vrais vissages (pas de points fixes).

Cor : Si un déplacement de $\mathcal{E}$ possède au moins un point fixe, il s'agit d'une rotation.

Prop : Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de $\mathcal{E}$ et, s, s' les réflexions par rapport à ceux-ci.

Si $\mathcal{P} // \mathcal{P}'$ alors $s' \circ s$ est la translation de vecteur $2\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ tel que $t_{\vec{n}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. Sinon, $s' \circ s$ est une rotation autour de la droite intersection de ces deux plans.